Nous savons maintenant que chacune des deux équations du système représente une droite Ces deux droites ont en général un point commun M dont les coordonnées sont les solutions du système.

$$M\left(x=\frac{2m}{m-1} \quad y=\frac{m^2-m+1}{m-1}\right)$$

Pour déterminer une relation indépendante de m entre les deux coordonnées x et y du point M il suffit de calculer m en fonction de x avec l'abscisse de M et de reporter cette valeur de m dans l'équation de l'ordonnée du point M.

$$x=\frac{2m}{m-1} \Rightarrow (m-1)x=2m \cdots m \neq 1$$

$$mx-x=2m$$
$$mx-2m=x$$
$$m(x-2)=x$$
$$m=\frac{x}{x-2}$$

On reporte cette valeur dans l'ordonnée du point M.

$$y=\frac{\left(\frac{x}{x-2}\right)^2-\frac{x}{x-2}+1}{\frac{x}{x-2}-1}$$

$$y=\frac{\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}}{\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}}$$

$$y=\frac{\frac{x^2-x(x-2)+(x-2)^2}{(x-2)^2}}{\frac{x-x+2}{x-2}}$$

$$y=\frac{\frac{x^2-x^2+2x+x^2-4x+4}{(x-2)^2}}{\frac{2}{x-2}}$$

$$y=\frac{x^2-2x+4}{(x-2)^2}\times\frac{(x-2)}{2}$$

$$y=\frac{x^2-2x+4}{2(x-2)}$$

Il existe donc une relation entre les coordonnées du point M.

Cette relation détermine une courbe (une fonction) sur laquelle se déplace le point M.
Etudions cette fonction :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{2(x-2)}=\frac{x^2-2x+4}{2x-4}$$

Cette fonction est une fraction dont le dénominateur doit être différent de zéro :

$$2(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

Son domaine de définition sera donc :

$$D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

Les limites aux bornes de ce domaine de définition seront :
Lorsque x tend vers + ou – l'infini :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{2x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+4}{2(x-2)}$$

$$x^2-2x+4 \to 4-4+4=4$$

$$x-2 \to 2^- - 2 = 0^- \quad donc \quad (x-2) < 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

Lorsque x tend vers 2 par valeurs supérieures à 2

$$x-2 > 0$$

$$x-2 \to 2^+ - 2 = 0^+ \quad donc \quad (x-2) > 0$$

Il existe donc une asymptote verticale d'équation

$$x = 2$$

Existe-t-il un asymptote oblique ?
Dans le cas particulier de notre fonction deux méthodes peuvent être appliquées.
Première méthode commune à toutes les fonctions : On remarque que lorsque x tend vers l'infini f(x) tend également vers l'infini. Il eut donc y avoir une asymptote oblique. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.
S'il existe une asymptote oblique elle sera de la forme y ou $g(x) = ax + b$
le coefficient directeur de cette asymptote a est tel que $\frac{fx}{x}$ tend vers a lorsque x tend vers l(infini :

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4}{2x(x-2)} = a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

La valeur de b est telle que :$f(x) - ax$ tend vers b lorsque x tend vers l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4}{2(x-2)} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4}{2(x-2)} - \frac{x(x-2)}{2(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4-x^2+2x+4}{2(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2(x-2)} = 0$$

Il existe donc une asymptote oblique d'équation

$$y = \frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$$

Dans ce cas particulier où la fonction étudiée est un quotient de deux polynôme, on aurait pu effectuer la division des deux polynômes.

$$\begin{array}{l|l} x^2-2x+4 & 2x-4 \\ -x^2+2x & \frac{1}{2}x \\ \hline 0\ +4 & \end{array}$$

Ainsi notre fonction peut s'écrire aussi :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{2x-4}=\frac{1}{2}x+\frac{4}{2x-4}$$

Comme $\frac{4}{2x-4}$ tend d'une façon évidente vers 0 lorsque x tend vers l'infini, nous en déduisons que $y=g(x)=\frac{1}{2}x$ asymptote à la courbe de la fonction $f(x)$.

Aux points où les tangentes à la courbe sont horizontales la dérivée de notre fonction est nulle. Calculons cette dérivée :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{2x-4}$$

$$f'(x)=\frac{u'v-v'u»}{v^2}=\frac{\left(x^2-2x+4\right)'(2x-4)-(2x-4)'\left(x^2-2x+4\right)}{(2x-4)^2}$$

$$f'x)=\frac{(2x-2)(2x-4)-2\left(x^2-2x+4\right)}{(2x-4)^2}$$

$$f'x)=\frac{4x^2-8x-4x+8-2x^2+4x-8}{(2x-4)^2}=\frac{4x^2-2x^2-8x-4x+4x+8-8}{(2x-4)^2}$$

$$f'x)=\frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}=\frac{2x(x-4)}{(2x-4)^2}$$

Pour qu'une fraction soit égale à 0 il faut et il suffit que son numérateur soit égal à 0 et que son dénominateur soit différent de 0.

$$f'x)=0\quad\frac{2x(x-4)}{(2x-4)^2}=0\quad\Rightarrow\ 2x(x-4)=0\ \ et\ \ (2x-4)^2\neq 0$$

$$2x(x-4)=0\ \Rightarrow\ x=0\quad ou\quad x=4$$

Il existe donc 2 tangentes horizontales à cette courbe aux points d'abscisse $x=0$ et $x=4$

Pour construire la courbe, nous avons besoin du tableau de variation construit à partir de la dérivée et d'un tableau de différentes valeurs qui permettront de positionner quelques points de la courbe sur un graphique et de les relier.

C’est ainsi qu’on procédait en 1962, sans calculatrice et sans logiciel graphique.

Voir dans la dernière section, grâce à geogebra le graphe de la courbe ainsi que toutes les modalités du problème.

Tableau de variation :

Dans la ligne des x on note les valeurs du domaine de définition $(-\infty; 2+\infty)$ ainsi que les valeurs pour lesquelles la dérivée s’annule (0 et 4) par ordre croissant.
Dans la ligne des $f'(x)$on note le signe de la dérivée qui est déterminé par la règle du signe du trinôme du second degré.
Dans la ligne $f(x)$on note les différents sens de variation de la fonction selon le signe de la dérivée. On note aussi les valeurs ou limites de $f(x)$correspondant aux différentes valeurs ou limites de x.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1.0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	3.0	↗ $+\infty$

Tableau de valeurs :

x	-10	--8	-6	-4	-2	0	0,5	1	1,5	2,5	3	4	6	8	10
f(x)	-5,17	-4,2	-3,25	-2,33	-1,5	-1	-1,08	-1,5	-3,25	5,25	3,5	3	3,5	4,33	5,25

Pour visualiser la fonction ainsi que toutes les modalités du problème, il faut cliquer sur la dernière section de ce déroulement.